Marco Ripà

La strana coda della serie n^n^…^n

Editrice UNI Service

Marco Ripà, *La strana coda della serie n^n^...^n*

Via Verdi, 9/A – 38122 Trento
www.uni-service.it – editrice@uni-service.it

Prima edizione: novembre 2011 – Printed in Italy

ISBN 978-88-6178-789-6

Progetto grafico di copertina: ecrù

E-mail: marcokrt1984@yahoo.it

“O voi che siete in piccioletta barca,
desiderosi d'ascoltar, seguiti
dietro al mio legno che cantando varca,

tornate a riveder li vostri liti:
non vi mettete in pelago, ché forse,
perdendo me, rimarreste smarriti.”

Paradiso, Canto II, vv. 1-6

PREMESSA (O “PROMESSA” DELL’AUTORE)

dedicata a tutti quelli che masticano appena un po’ di matematica

Mi accosto a un soggetto complesso, del quale conosco davvero pochissimo, conscio di non padroneggiare pienamente i sofisticati strumenti d’indagine dei quali, in tutta probabilità, avrò bisogno e che l’argomento trattato richiederebbe. Spero vivamente che intuito e logica siano in grado di supplire a tale carenza. Le presenti pagine sono rivolte anche a chi ignora cosa sia la “teoria dei numeri” e a coloro i quali non abbiano mai incontrato un “iper-operatore”, ma che avvertono ancora il desiderio di spiccare un volo pindarico verso l’Empireo dei grandi numeri o semplicemente di comprendere meglio la logica intrinseca di operazioni elementari, come l’elevamento a potenza. In fondo, non si tratta semplicemente di una moltiplicazione reiterata, riconducibile a sua volta alla ripetizione di banali somme? Ecco, questo sarà l’approccio (prevalentemente empirico) che adotterò, cercando di traghettare direttamente il lettore in un lido buio e sconosciuto, nel quale poter vivere in prima persona il piacere della scoperta. Spesso non fornirò risposte in grado di soddisfare un buon matematico e persino qualche “ingegnere” incallito storcerà il naso quando leggerà *uguale* anziché *congruo* o altre nefandezze del genere. Fatta eccezione per il capitolo 8 e per la prima appendice, cercherò di parlare diffusamente delle “torri di potenze”, addirittura senza mai far riferimento all’operatore inverso (il logaritmo).

Ho preferito rinunciare a scrivere un *paper* scientifico, optando piuttosto per una sorta di digressione ad alta voce, in italiano, ispirata da una particolarità numerica nella quale sono incappato di recente. Digressione da cosa? Ma è ovvio, dalla fredda matematica di tutti i giorni!

Salpiamo ciurma: su le ancore...

1. INTRODUZIONE

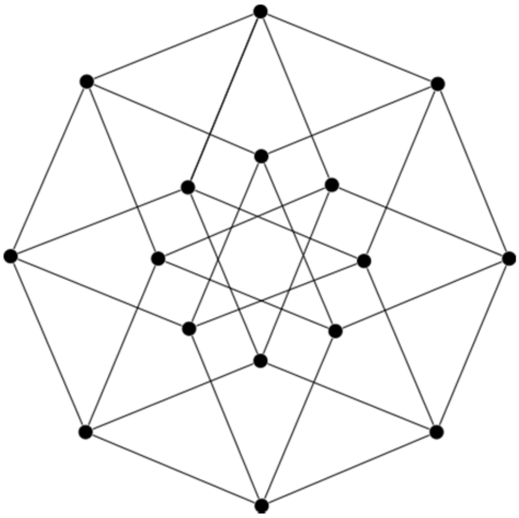


Figura 1. "Tesseratto". Esso estende il concetto di cubo a uno spazio 4D.

Gli studiosi della teoria dei numeri (la branca della matematica pura che si occupa di amenità come quelle discusse in queste pagine) hanno soltanto di recente trovato un argomento "pesante" da opporre ai sadici colleghi che li accusavano di interessarsi di argomenti troppo astratti, per quanto "divertenti", privi di risvolti concreti. Infatti, solo negli anni '70 del secolo scorso, con l'avvento in ambito crittografico dell'algoritmo asimmetrico a chiave pubblica noto come RSA, costoro hanno avuto la possibilità di rispondere: "La sicurezza informatica, quella delle transazioni finanziarie e la privacy della posta elettronica dipendono dalla difficoltà di scomporre grandi numeri composti nel prodotto di due primi". Proprio l'RSA è edificato sul *Teorema di Fermat-Eulero* [1], il quale consente di spiegare molti dei risultati che emergeranno nella trattazione.

Quello che mi propongo di sondare, non mi permetterà di eccepire ai detrattori valide implicazioni in campo economico o informatico; mi auguro però possa consentire a qualche lettore di sviluppare idee proprie, approcciandosi con occhi nuovi a tematiche che raramente popolano i discorsi che separano il cornetto dal caffè mattutino.

Nella presente dissertazione mi prefiggo di presentare una singolare proprietà che ho rilevato analizzando le ultime cifre di una particolare classe di esponenziali concatenate. Mi concentrerò solo su quello che avviene nella base di numerazione decimale, anche se, ricorrendo ai "numeri p-adici", è possibile estendere uniformemente la convergenza riscontrata a qualsiasi altra base (fissa) si scelga di adottare. Trattasi dunque di una caratteristica intrinseca, non dipendente dal sistema numerico considerato.

Non ho conoscenza di fonti particolari al riguardo (ecco spiegato il motivo della scarsa bibliografia), ma è comunque probabile che l'argomento sia già stato discusso altrove. Ho deciso di procedere controcorrente. Se i veri matematici si compiacciono di rimuovere le impalcature alla fine del loro lavoro, così da lasciar risaltare solo il prodotto finito, io inizierò da quello che è stato il reale punto di partenza: tutto ciò che ho appreso alla fine di queste pagine, ha rappresentato una conquista lenta e solitaria, compiuta "tappandomi le orecchie", senza farmi tentare dalla voglia di cercare fonti che potessero trarmi d'impaccio. Qualche nozione richiamata qua e là è il frutto di un controllo svolto a posteriori, su quanto avevo finito di scrivere in completo isolamento mentale.

Nel caso specifico lavoreremo soltanto con i numeri naturali (interi positivi), ma, per i più rigorosi di voi, ho ritenuto giusto inserire un preambolo, nel quale illustro alcune proprietà generali valide nell'intero insieme dei numeri reali.
Faccio comunque presente che è altresì possibile effettuare analisi analoghe anche nel campo complesso, ciò genera interessanti parallelismi con la fisica e coinvolge lo studio dei sistemi dinamici (l'iterazione di funzioni complesse e soprattutto le c.d. PDE – partial differential equations -). L'implementazione di simili algoritmi sui numeri complessi origina anche quelle stupende figure auto-simili, note ai più semplicemente come *frattali*. Esistono le tetrazioni iperboliche, quelle paraboliche,… però alla fine io: **"Non sono un matematico, ma soltanto un ragazzo che coltiva come hobby la logica, il quale ha subìto il fascino dei numeri fin da piccolissimo"**.

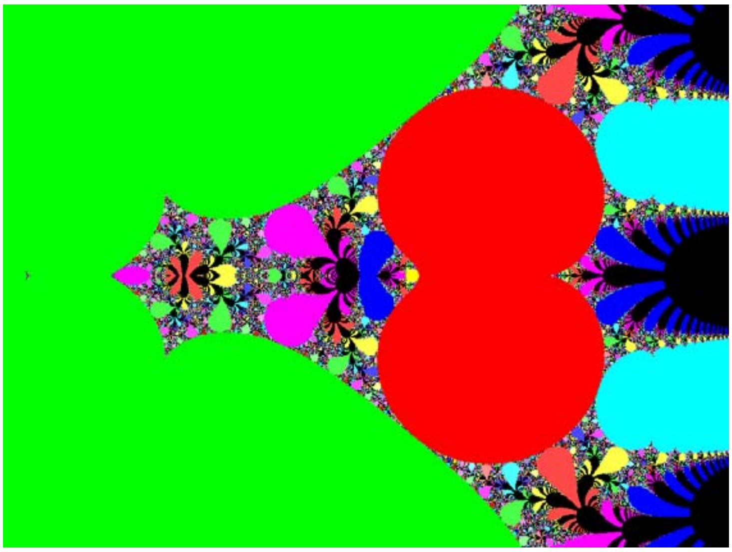


Figura 2. "Tetration by period". Un esempio di frattale tratto da Wikipedia (http://en.wikipedia.org/wiki/File:Tetration_period.png).

La sfida è di descrivere le relazioni più significative riguardanti gli iper-operatori (in particolare la tetrazione) restando confinati tra gli interi e senza l'ausilio dei più noti risultati nel campo della teoria dei numeri, fornendo così un breve saggio fruibile senza sforzo da chi non ha particolari conoscenze di matematica, ma solamente la classica "infarinatura" da liceo.

Innanzitutto, è doveroso definire la serie esponenziale [1].
Si tratta di un certo insieme di funzioni matematiche tali che

$$\forall x \in \mathcal{R},\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x. \qquad (1)$$

Per ogni valore reale della variabile indipendente x, la serie converge a un numero finito, dato appunto da e^x. "e" è la nota *costante di Nepero* (2.71828…), ottenibile sviluppando la serie $e \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$ (dove 0!:=1).

Nel nostro caso però, affrontiamo un problema leggermente differente e forse un po' più complicato: l'ipotetica convergenza della serie x^x^x^…^x, nella quale il termine x appare infinite volte e, per

---

[1] Per la definizione completa e per ulteriori approfondimenti circa l'estensione dell'esponenziale al piano complesso si rimanda al riferimento bibliografico [2], il quale contiene una sintetica (ma inappuntabile) trattazione dell'argomento.

convenzione, si calcolano le potenze dall'ultima a destra, procedendo a ritroso. Mettendo (infinite) parentesi, avremmo quindi x^(x^(x^(…^(x^x)…))).

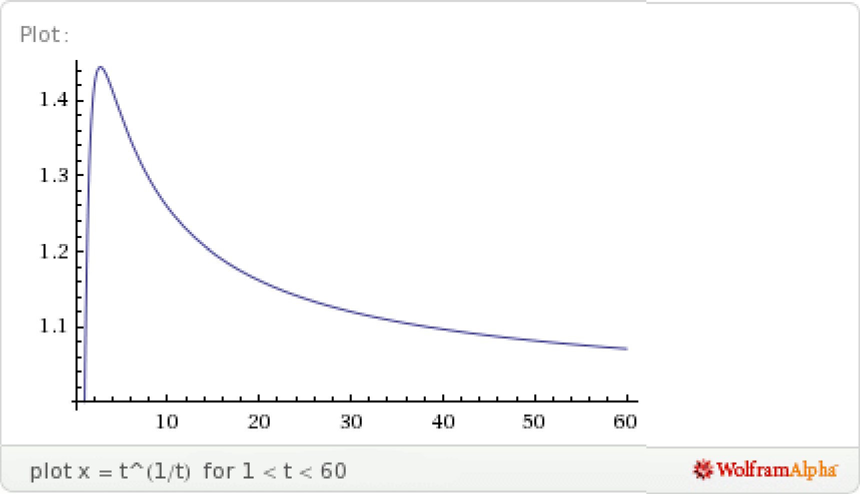
Limitando lo studio ai reali, si può dimostrare (cfr. appendice 1) che questa serie converge per x all'interno di un certo intervallo.
Se $x<\frac{1}{e^e}\approx 0.065988$, l'espressione non trova significato tra i numeri reali, mentre per x=0 tale scrittura appare priva di senso (forma indeterminata). Si ha invece convergenza per $x \in [e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}]$.

Per $x>e^{\frac{1}{e}}\approx 1.44466786$ la serie diverge a $+\infty$.

Analizzando l'intervallo di convergenza, se poniamo x^x^x^…^x:=t, si ha che $t=x^t$ e il valore ricercato coincide con la soluzione dell'equazione $x=t^{\frac{1}{t}}$, cioè radice "t-esima" di "t" uguale a x.

Giusto per fare un esempio pratico (capovolgendo gli estremi del problema), se ci trovassimo di fronte a una funzione del tipo x^x^x^x^…^x=2.6, per trovare quanto vale x, ci basterà calcolare $2.6^{\frac{1}{2.6}}\approx 1.444126$ (che infatti ricade perfettamente all'interno dell'intervallo menzionato poc'anzi). Da notare che, se per esempio andassimo a calcolare il valore di x^x^x^…^x=2, otterremmo x≈1.414214 (ovvero la radice quadrata di 2), che è minore del valore della serie $(2.6^{\frac{1}{2.6}})$^$(2.6^{\frac{1}{2.6}})$^…^$(2.6^{\frac{1}{2.6}})$ considerata poco fa. Per $1<x<e^{\frac{1}{e}}$, è facilmente dimostrabile che la funzione t=x^x^x^...^x è monotona crescente e il risultato discende immediatamente dalla constatazione che $\sqrt{2}$, la base del nostro secondo esempio, è nettamente inferiore a 1.444126.

Il massimo assoluto della funzione, corrispondente a t=e, implica che, per costruzione, $t^{\frac{1}{t}}$^$t^{\frac{1}{t}}$^…^$t^{\frac{1}{t}}$=e(≈2.718281828459) sse[2] $t^{\frac{1}{t}}_{(max)}\approx 1.444667861$[3].



plot x = t^(1/t) for 1 < t < 60

Figura 3. Grafico ottenuto con Wolfram|Alpha.

---

[2] "Se e solo se".

[3] Il link [3] contiene una semplice ed esaustiva spiegazione della convergenza delle c.d. "infinitely iterated exponentization" (con base x∈ $\mathcal{R}^+$).

Detto ciò, passiamo al reale argomento di questo saggio. Circoscriverò la mia analisi all'insieme dei numeri naturali maggiori di 1, $x := n \in \aleph\backslash\{0,1\}$, cosicché ci troveremo a considerare soltanto sottoclassi della generica espressione n^n^n^…^n.

Se io vi chiedessi, utilizzando al più carta e penna, di trovare per quale numero naturale $n \in [1,100]$ l'espressione n^n^n^…^n, con n che appare k volte al suo interno, presenta il maggior numero di cifre "che restano invariate" in un generico passaggio tra k e k+1, posto k≥2, di certo mi rispondereste all'unisono: "n=100".

Questo è ovvio, poiché tutti i valori di n che terminano con uno zero, generano (già per k=2) delle stringhe sconfinate di *tondini* messi in fila dietro a un unico uno. Per dare un'idea più precisa del concetto, se poniamo n=100 e k=2, otteniamo $100^{100}=1*10^{200}$; in pratica, come se prendessimo dieci classi di bambini (che rappresentano gli zeri) e li facessimo accodare a una sola maestra (l'uno) [4].

Per k=3 arriviamo già a qualcosa come $2*10^{200}$ zeri in fila. Dunque, nel nostro caso, le cifre immutate tra k=2 e k+1=3 sarebbero ben 200 (2 immutate tra n=100 e $n^n=100^{100}$ e 198 "nuove di zecca"), e non c'è nessun altro numero naturale minore di 101 in grado di batterlo.

Se ora però chiedessi di individuare il valore n<274 che massimizza la quantità di cifre fisse alla fine del numero stesso, siete sicuri che 100 vada ancora bene come soluzione?

La risposta è: "No". La scelta corretta si sposta sul 200, con ben 400 cifre (zeri) invariate nel passaggio da k=2 a k=3.

Senza perderci nei dettagli, succede qualcosa di molto simile a quello che accade quando computiamo un numero fattoriale (n!) molto esteso. In quel caso, gli zeri finali della sua rappresentazione decimale, derivano dal numero complessivo di volte per cui si ripete il fattore 5 all'interno di n,(n-1),(n-2),…,3,2,1 [5]. Poiché 10=2*5, risulta subito chiaro che di 2, nell'intervallo dei numeri naturali tra 1 e n, ce ne sono molti più che di 5; così è sufficiente *contare* quante volte appare il fattore 5. Dovremo però considerare che $25=5^2$ e dunque ci toccherà aggiungere un ulteriore zero per ogni fattore divisibile anche per 25, un altro ancora per quelli divisibili per 5^3, e così via. L'algoritmo da applicare è

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{int}\left[\frac{n}{5^i}\right]. \qquad (2)$$

Nella (2), int[.] indica la "parte intera" dell'argomento. È evidente che non sarà mai necessario iterare il calcolo fino a 5^n, in quanto l'argomento dell'operatore *parte intera* degenererà molto prima in valori inferiori all'unità.

Contare gli zeri per n che termina con uno zero, non è molto interessante, così trascurerò (tranne sporadici richiami – cfr. appendice 2 -) tutti i numeri n'= n*10.

Ho deciso di disquisire sulle cifre finali di *una torre di potenze* con base naturale n, perché si verificano risultati curiosi, almeno in un primo momento.

Se prendiamo, per semplicità, un numero primo, ad esempio il 3, e andiamo a calcolare le ultime 10 cifre delle sue *tetrazioni* (facendo scorrere k da 1 in poi), otteniamo i valori riportatati nella tabella 1.

---

[4] Un simile numero supera di gran lunga quello degli atomi presenti nel nostro universo, stimati nell'ordine di 10^{78}.

[5] Gli zeri finali sono, intuitivamente, generati dalla moltiplicazione per 10, ma in realtà sono il 5 e le sue potenze a determinarne la quantità.

k	**$^{k}3$ (3^3^3^… k volte)**
1	3
2	27
3	…55974849**87**
4	…6100739**387**
5	…966035**5387**
6	…51265**95387**
7	…3200**195387**
8	…550**4195387**
9	…80**64195387**
10	…6**464195387**
11	…**2464195387**
	Da qui in poi, le ultime 10 cifre restano invariate. Formalmente: $\forall k \geq 11$, $^{k}3(\text{mod } 10^{10}) \equiv 2464195387$
12	…**2464195387**[6]

Tabella 1.

Per calcolare le cifre finali di un numero di questo tipo possiamo ricorrere all'aritmetica modulare (alcuni esempi sono mostrati nei capitoli 13 e 14), ma è molto più semplice affidarsi alla tecnologia [7].
Quanto appena osservato non è una casualità, bensì un risultato tipico d'infiniti operatori (da "hyper-4" in poi). Introduciamo ora qualche formula per provare a "prevedere in anticipo" il comportamento di altre progressioni simili alla precedente.
Indico con p_i le "i" quantità delle cifre finali che rimangono fisse nel passaggio da k a k+1, ma che non lo erano nel precedente *step*. Si dimostra (in virtù della convergenza p-adica della tetrazione) che, da un certo valore k in avanti, tutti i p_i restano immutati; vale a dire che, da una data iterazione, è costante il numero delle "nuove" cifre che non variano rispetto al passaggio precedente. Definisco come "congruenza incrementale" (d'ora in poi "Ci") tale quantità fissa.
Secondo quanto detto, nell'esempio precedente, abbiamo $p_1=0$ e $p_2=\text{Ci}=1$.
A questo punto, introduco come variabile dipendente quella che ho chiamato "velocità di convergenza" (Vc), la quale lega p_i e Ci. Essa ci consente di prevedere il quantitativo delle ultime cifre fisse della tetrazione considerata, per valori di k arbitrariamente grandi [8], sulla base di pochi dati iniziali (k piccolo). Nel caso generale, nel quale, ipoteticamente, per i primi h-step non si ha una "crescita incrementale" costante (Ci appunto), saremmo di fronte alla seguente situazione (dove ovviamente $h<n$):

---

[6] Nel capitolo 7, verrà mostrato che le prime cifre *non fisse* seguono esse stesse leggi ricorsive.

[7] Io mi sono avvalso della piattaforma *Wolfram|Alpha*, immettendo manualmente gli input, in ottemperanza alle regole che permettono di usufruire del servizio (in maniera totalmente gratuita) agli utenti privati.

[8] Nel corso dello studio, offrirò prove convincenti della linearità della convergenza incrementale, ovvero Ci=cost, da un certo step (dipendente dalla base scelta). Si vedrà quindi che $^{k}a(\text{mod } 10^{i}) \equiv \text{cost}$ a partire da uno specifico valore di k, vincolato, oltre che alla base, al particolare "i" fissato. Espliciterò infine (nel penultimo capitolo) un cospicuo numero di cifre finali, relativo a una tetrazione di altezza particolarmente elevata, utilizzando una precisione alla portata di qualsiasi CPU – nel mio caso, ho impiegato un modesto PC da 2.26 GHz -.

$$Vc = \begin{cases} p_1 & k(1 \to 2) \\ p_2 & k(2 \to 3) \\ \dots & \dots\dots \\ p_h & k(h \to h+1) \\ Ci & k(h+1 \to h+2; h+2 \to h+3; \dots; (n-1) \to n) \end{cases} \qquad (3)$$

Il risultato più evidente di quanto visto è la possibilità di calcolare $\bar{k}$, il valore limite di k (minore o al più uguale a k), che ci permette, fissato il numero di cifre finali (#Cf) che desideriamo conoscere (per una data progressione n^n^n^...^n – con $k \in \aleph$ –), di ottenere un output terminante con le stesse #Cf cifre della torre di potenze originaria.

La formula, nel caso generale in cui i primi h-step mostrano valori differenti da quello fisso di convergenza (ovvero $p_h \neq Ci = p_{h+1}$ e, per convenzione, $\mathbf{p_0{:=}0}$), è

$$\boldsymbol{k(\mathrm{lim}) \coloneqq \bar{k} = \left\lceil \frac{\#Cf - \sum_{i=0}^{h} p_i}{Ci} \right\rceil + h}\,. \qquad (4)$$

⌈x⌉ indica l'operatore "ceiling" ovvero l'arrotondamento di $x \in \mathcal{R}^+$**al più piccolo intero ≥ x. Ad esempio ⌈3.2⌉=4.**

Nelle prossime righe spiegherò tra quali valori varia il parametro h:=h(n). Successivamente verrà illustrato che p_1 e p_2 possono anche essere contemporaneamente nulle ma p_3 sarà comunque sempre positiva (cfr. capitolo 10), mentre Ci è, per definizione, ≥1. Qualora $p_i = Ci \ \forall i \in \aleph \backslash \{0\}$, la formula (4) si ridurrebbe a $\boldsymbol{\bar{k}} = \left\lceil \frac{\#Cf}{Ci} \right\rceil$, mentre, se $p_1 = p_2 = 0$ ($p_3 = Ci$), risulterebbe $\boldsymbol{\bar{k} = \left\lceil \frac{\#Cf}{Ci} \right\rceil + 2}$. (5)

Nella (5) bisogna prestare attenzione al fatto che per calcolare Ci (e quindi applicare la formula) sarà necessario computare, come minimo, k=4. È infatti evidente che per conoscere il valore di Ci si devono calcolare almeno h+2 termini della serie n^n^…^n [9]**.**

Gli intervalli entro i quali si muovono le variabili considerate sono i seguenti:
#Cf≥1; $p_i \geq 0$; Ci≥1; $\sum_{i=0}^{h} p_i \geq 0$.

È superfluo osservare che, per gli "n" t.c. $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = Ci$ (h=0), risulta banalmente $\bar{k} = \left\lceil \frac{\#Cf}{Ci} \right\rceil$ (relazione valida ∀k ≥ 2).

Proviamo a verificare quanto detto per una data potenza della base precedente; scegliamo come "n" il numero 3^{10}=59049.

k=1→59049
k=2→59049^59049=…56837534**49** (→ p_1=2)
k=3→59049^59049^59049=…453207**3**449 (→ $p_2 = 2 = p_1 \mapsto p_1 = Ci = 2$)
k=4→59049^59049^59049^59049=…1028**07**3449 (→ Ci=2)
…

Supponiamo ora di voler conoscere le ultime 9 cifre di 59049^59049^…^59049, con k=600.
È sufficiente usare la versione ridotta della (4), poiché p_1=Ci:

---

[9] Il corretto utilizzo della formula (4) richiede la conoscenza preliminare di h. Tale informazione è desumibile dall'analisi della serie n^n^…^n per i primi valori di k (legati allo specifico n) e da considerazioni generali circa il comportamento delle basi costituite da potenze di n, in serie esponenziali analoghe (vedi capitolo 2).

$$\bar{k} = \left\lceil \frac{\#Cf}{Ci} \right\rceil = \left\lceil \frac{9}{2} \right\rceil = 5.$$

Ci basterà dunque andare a calcolare le ultime 9 cifre di 59049^59049^59049^59049, che sappiamo essere le stesse del numero che ci interessa studiare.

In realtà, quanto appena detto non sarebbe del tutto *lecito*; infatti, prima di poter affermare che p_l=Ci, si dovrebbe verificare che tutti i successivi (infiniti) “h-1” p_i sono uguali a p_1. Illustrerò successivamente le relazioni che ci consentono di stabilirlo a priori, non c’è una regola unica.

Qui di seguito sono riportati i valori di p_i e Ci relativi alle prime 25 potenze del 3 (da n=3^1 a n=3^{25}=857288609443).

3^	N	p_i	Ci
1	3	**0**	1
2	9	**1**	1
3	27	**0**	1
4	81	**2**	1
5	243	**0**	**2**
6	729	1	1
7	2187	0	1
8	6561	2	1
9	19683	0	1
10	59049	2	**2**
11	177147	0	1
12	531441	2	1
13	1594323	0	1
14	4782969	1	1
15	14348907	0	**2**
16	43046721	2	1
17	129140163	0	1
18	387420489	1	1
19	1162261467	0	1
20	3486784401	4	**2**
21	10460353203	**0**	1
22	31381059609	**1**	1
23	94143178827	**0**	1
24	282429536481	**2**	1
25	847288609443	**0, 3, 3, 3**	**2**

Tabella 2. La struttura di $p_i(3^j)$ rivela un’evidente ciclicità al crescere dell’esponente “j”; studieremo tra poco le sottili relazioni che regolano l’andamento delle $Vc(3^j)$.

Circa i possibili valori di p_1, si deve tenere conto delle caratteristiche intrinseche del particolare numero n, ma è relativamente semplice risalire alle ultime cifre di n^n e confrontarle con quelle di n stesso (capitolo 10). Il valore di p_2 differirà da Ci solo in alcuni casi abbastanza circoscritti (come ad esempio può avvenire se n non è coprimo a 10, oppure quando n=u^i − dove “u” rappresenta un sottoinsieme dei numeri primi e “i” un

generico intero divisibile per 5 -). In generale però, p_i può essere composta da più di due elementi (nelle prossime pagine farò riferimento a questa evenienza come "p_i multipla") anche per basi costituite da numeri primi. A riprova di quanto asserito, possiamo osservare che $p_i(3263443)=\{0,3,3,3\}$, mentre $p_5=Ci=2$. Da questo momento in poi, se $p_i=Ci$ $\forall i\geq 2$, indicherò p_1 semplicemente con "p" (omettendo il pedice).
Da notare che può capitare che p_1 e p_2 assumano contemporaneamente valore nullo (come anticipato in precedenza, quando si è accennato alla versione ridotta della (4)) [10]. Ciò sta a indicare che la cifra meno significativa varia nel passaggio da k=1 a k=2 e parimenti non resta la stessa tra k=2 e k=3. In tal caso, non si potranno azzardare scorciatoie per calcolare Ci [11] e risulterà, per forza di cose, necessario risalire al numero delle cifre finali rimaste invariate nel passaggio da n^n^n a n^n^n^n. Infatti, se scegliamo **n=2**, si ha $p_1=p_2=0$ (e Ci=1), ma si tratta in realtà di un caso limite tra i numeri primi, giacché $p_2(n)=0$ implica che "n" è divisibile per 2 (ma non per 4) e che l'unico numero primo soddisfacente tale requisito è appunto il 2.
Se però consideriamo numeri che non sono primi (o loro potenze), si possono incontrare (infiniti) "n" tali che $p_1=p_2=0$; per esempio il numero 8398 (**2***11*17*19) è caratterizzato da $p_1=p_2=0\neq p_3=Ci=1$ [12].
Congetturo che se $p_2=0$ allora $p_3=Ci=1$, ma, restando tale relazione tutta da dimostrare (non che il compito sia particolarmente complicato – specialmente dopo la lettura del decimo capitolo -), è necessario attenersi ai dettami precedenti.

Anche i valori di p_i legati alle successive potenze di un numero primo (n^1, n^2, n^3,…, n^i – con n appartenente alla sequenza **A000040** della *Online Encyclopedia of Integer Sequences* -) presentano evidenti ricorsività, come evidenziato dall'esempio relativo a n=3. Tuttavia è necessario differenziare i vari casi, senza potersi avvalere di principi troppo generali.

Ecco di seguito degli specchietti semplificati, i quali riassumono l'evoluzione delle Vc che si riferiscono a basi costituite dai più piccoli numeri primi elevati a particolari potenze.

- Per $n=2^m$ (con m non divisibile per 5), si ha che

$$\begin{cases} n=2 & \rightarrow p_1=p_2=0\,;\ p_2=Ci=1 \\ n=2^{4k} & \rightarrow p_1=2;\ p_2=Ci=1 \\ n\neq 2,2^{4k} & \rightarrow p_1=0; p_2=Ci=1 \end{cases}$$

(dove $k\in\aleph\backslash\{0\}$ e l'esponente "m" non è divisibile per 5).

- Per $n=3^m$ (con m non divisibile per 5) vale

$$\begin{cases} n=3^{2k-1} & \rightarrow p_1=0;\ p_2=Ci=1 \\ n=3^{4k} & \rightarrow p_1=2;\ p_2=Ci=1 \\ n=3^{2k}, n\neq 3^{4k} & \rightarrow p_1=1;\ p_2=Ci=1 \end{cases}$$

(dove $k\in\aleph\backslash\{0\}$ e "m" non è divisibile per 5).

---

[10] In realtà, il fatto che non ci siano cifre finali invariate tra k=2 e k=3, implica automaticamente che $p_2\neq Ci$, in quanto Ci è costante e sempre ≥ 1; inoltre $p_2=0$ ⤇ $p_1=0$. Occorre altresì dire che, purché $p_2\geq 1$ (ciò significa che p_1 e p_2 non sono entrambe nulle), risulta sempre $p_2\geq Ci$. È tuttavia possibile che $p_1>p_2$ (come esempi possiamo considerare $n=26^5$ oppure $n=153^{625}$ per i quali $p_1=5>4=p_2$ e Ci=3).

[11] Ad esempio supponendo (con un buon margine di confidenza) che $p_2=Ci$, forti della certezza di non poter sottostimare il reale valore della Vc (vedi nota 10).

[12] Questo è sempre legato alla presenza del 2 tra i suoi fattori primi. Se il 2 dividesse più volte la base, ciò non avverrebbe, in quanto tutte le potenze del 2 maggiori di 1 hanno $p_2\geq 1$ (vedi capitolo 10). In questo caso, la formula da utilizzare è (come già ricordato) $\bar{k}=\left\lceil\frac{\#\mathrm{Cf}}{\mathrm{Ci}}\right\rceil+2$.

- Se $n=5^m$, posto "m dispari" e $m \geq 5$, **p=4** e **Ci=2** (per tutti i valori di "m" soddisfacenti le condizioni iniziali). Per "m pari" osserviamo regole più complesse: $\forall$ m=10+4*k (partendo da m=10 e procedendo di 4 in 4) si ha p=6 e Ci=3, **se n=5^(2^(4+k)) otteniamo il curioso risultato p=12+2*k**, $\forall k \in \aleph_0$ [13]. Infatti, per n=5 e $m=2^k$, al crescere di k, si registrano valori di p sempre più elevati (k=5 ⤇ p=14, k=6 ⤇ p=16, k=7 ⤇ p=18, …)!

Nel prossimo capitolo analizzerò i casi rimanenti, relativi alle basi suddette, per poi riferire i risultati a basi generiche. In tale sede, chiarirò le relazioni significative (generalizzando i casi particolari appena visti), isolando delle macro-categorie e discriminando a seconda dei particolari numeri che compaiono nelle fattorizzazioni delle basi delle nostre tetrazioni.

---

[13] In particolare, se $n=5^{16}$, risulta p=12, ovvero l'intera lunghezza della base (le 12 cifre fisse meno significative sono infatti 152587890625)!